Correction du devoir maison $n°6$

Irrationalité de $\mathbf{e}^x$ où $x \in \mathbb{Q}$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $I_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t$.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$I_0(x) = \int_{-1}^{1} \mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathbf{e}^{xt}}{x}\right]_{-1}^{1} = \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{x}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On effectue une intégration par parties avec $u : t \mapsto 1-t^2$ et $v : t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{xt}}{x}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$.

$$I_1(x) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t = \left[(1-t^2)\frac{\mathbf{e}^{xt}}{x}\right]_{-1}^{1} + \frac{2}{x}\int_{-1}^{1} t\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t = \frac{2}{x}\int_{-1}^{1} t\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t$$

On effectue une autre intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{xt}}{x}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$.

$$I_1(x) = \frac{2}{x}\left(\left[\frac{t\mathbf{e}^{xt}}{x}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{x}\int_{-1}^{1}\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t\right) = \frac{2}{x}\left(\frac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{x} - \frac{1}{x}\frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{x}\right) = \frac{(2x-2)\mathbf{e}^x + (2x+2)\mathbf{e}^{-x}}{x^3}$$

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. On effectue une intégration par parties avec $u : t \mapsto (1-t^2)^{n+2}$ et $v : t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{xt}}{x}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$.

$$\begin{aligned} I_{n+2}(x) &= \frac{1}{(n+2)!}\left(\left[(1-t^2)^{n+2}\frac{\mathbf{e}^{xt}}{x}\right]_{-1}^{1} + \frac{2(n+2)}{x}\int_{-1}^{1} t(1-t^2)^{n+1}\mathbf{e}^{xt}\right) \\ &= \frac{2}{(n+1)!x}\int_{-1}^{1} t(1-t^2)^{n+1}\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$.

On effectue une autre intégration par parties avec $u : t \mapsto t(1-t^2)^{n+1}$ et $v : t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{xt}}{x}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$.

$$\begin{aligned} I_{n+2}(x) &= \frac{2}{(n+1)!x}\left(\left[t(1-t^2)^{n+1}\frac{\mathbf{e}^{xt}}{x}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{x}\int_{-1}^{1}\mathbf{e}^{xt}\left[(1-t^2)^{n+1} - 2(n+1)t^2(1-t^2)^n\mathrm{d}t\right]\right) \\ &= \frac{4}{x^2 n!}\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^n\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t - \frac{2}{x^2(n+1)!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+1}\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{x^2 n!}\int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^n\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t - \frac{2}{x^2}I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

On va modifier la première intégrale pour faire apparaître $I_n(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} t^2(1-t^2)^n\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1}(t^2-1+1)(1-t^2)^n\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n+1}\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t \\ &= n!I_n(x) - (n+1)!I_{n+1}(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_{n+2}(x) &= \frac{4}{x^2 n!}\left(n!I_n(x)-(n+1)!I_{n+1}(x)\right)-\frac{2}{x^2}I_{n+1}(x)\\ &= \frac{4}{x^2}I_n(x)-\frac{4(n+1)}{x^2}I_{n+1}(x)-\frac{2}{x^2}I_{n+1}(x)\\ &= \frac{4}{x^2}I_n(x)-\frac{4n+6}{x^2}I_{n+1}(x)\end{aligned}$$

3. On va démontrer ce résultat par récurrence double. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons $P(n)$: il existe une fonction polynomiale P_n de degré n à coefficients entiers pour laquelle

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ I_n(x)=\frac{P_n(x)\mathbf{e}^x-P_n(-x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+1}}.$$

- Initialisation :
  Par la question 1.(a), on a montré que $P(0)$ était vrai avec $P_0 : x\mapsto 1$
  Par la question 1.(b), on a montré que P(1) était vrai avec $P_1 : x\mapsto 2x-2$.
- Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.
  Il existe une fonction polynomiale P_n de degré n à coefficients entiers pour laquelle

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ I_n(x)=\frac{P_n(x)\mathbf{e}^x-P_n(-x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+1}}$$

  Il existe une fonction polynomiale P_{n+1} de degré $n+1$ à coefficients entiers pour laquelle

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ I_{n+1}(x)=\frac{P_{n+1}(x)\mathbf{e}^x-P_{n+1}(-x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+3}}$$

$$\begin{aligned} I_{n+2}(x) &= \frac{4}{x^2}I_n(x)-\frac{4n+6}{x^2}I_{n+1}(x)\\ &= \frac{4}{x^2}\frac{P_n(x)\mathbf{e}^x-P_n(-x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+1}}-\frac{4n+6}{x^2}\frac{P_{n+1}(x)\mathbf{e}^x-P_{n+1}(-x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+3}}\\ &= \frac{4P_n(x)\mathbf{e}^x-4P_n(-x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+3}}-\frac{(4n+6)P_{n+1}(x)\mathbf{e}^x-(4n+6)P_{n+1}(x)\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+5}}\\ &= \frac{[4x^2P_n(x)-(4n+6)P_{n+1}(x)]\mathbf{e}^x-[4x^2P_n(-x)-(4n+6)P_{n+1}(-x)]\mathbf{e}^{-x}}{x^{2n+5}}\end{aligned}$$

  Donc, en posant $P_{n+2} : x\mapsto 4x^2P_n(x)-(4n+6)P_{n+1}(x)$ qui est bien une fonction polynomiale de degré $n+2$ à coefficients entiers, on a bien $P(n+2)$ vraie.

4. Soit $x\in\mathbb{Q}^*$. Il existe $(a,b)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que $x=\frac{a}{b}$.
   Supposons que $\mathbf{e}^x$ soit un nombre rationnel, que l'on écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$, avec p et q dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}$, $pqa^{2n+1}I_n(x)=b^{2n+1}\left(P_n(x)q-P_n(-x)p\right)$. Or P_n est une fonction polynomiale de degré n à coefficients constants, d'où $b^nP_n(x)\in\mathbb{Z}$ et $b^nP_n(-x)\in\mathbb{Z}$.
   D'où $pqa^{2n+1}I_n(x)=b^{n+1}\left(b^nP_n(x)q-b^nP_n(-x)p\right)\in\mathbb{Z}$.
   De plus, $I_n(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle.
   Par conséquent, $pqa^{2n+1}I_n(x)\neq 0$.
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale,

$$I_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n!}\int_{-1}^{1}\mathbf{e}^{xt}\mathrm{d}t=\frac{I_0(x)}{n!}.$$

   D'où $|pqa^{2n+1}I_n(x)|\leqslant \underbrace{pqI_0(x)|a|\frac{(a^2)^n}{n!}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$.
   Par conséquent, $pqa^{2n+1}I_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
   (c) La suite $(pqa^{2n+1}I_n(x))$ est une suite d'entier qui converge vers 0.
   Donc elle est stationnaire à 0. Impossible car $pqa^{2n+1}I_n(x)\neq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   Conclusion : $\mathbf{e}^x$ est un nombre irrationnel.